Epidemiología

Los modelos SI y SIR

Gerardo Martín

28-07-2023

El modelo SI

- Representa dinámica de infecciones con dos estados

Susceptibles $\longrightarrow$ Infectados

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I \tag{2}$$

Con transmisión denso-dependiente

Estado de equilibrio

Para encontrarlo, nos interesa el caso donde $\dot{I} = 0$:

$$\frac{dI}{dt} = 0 \therefore \beta SI = 0 \tag{3}$$

$$I^* = 0; S^* = 0 \tag{4}$$

Entonces hay dos puntos de equilibrio, con ó sin enfermedad

```r
beta <- 0.01
h = 0.1
t <- 25
S <- numeric(t/h)
I <- numeric(t/h)

S[1] <- 100
I[1] <- 1

for(i in 2:length(S)){
  S[i] <- S[i-1] + (- beta * S[i-1] * I[i-1]) * h
  I[i] <- I[i-1] + beta * S[i-1] * I[i-1] * h
}
```

Resultado de la integración

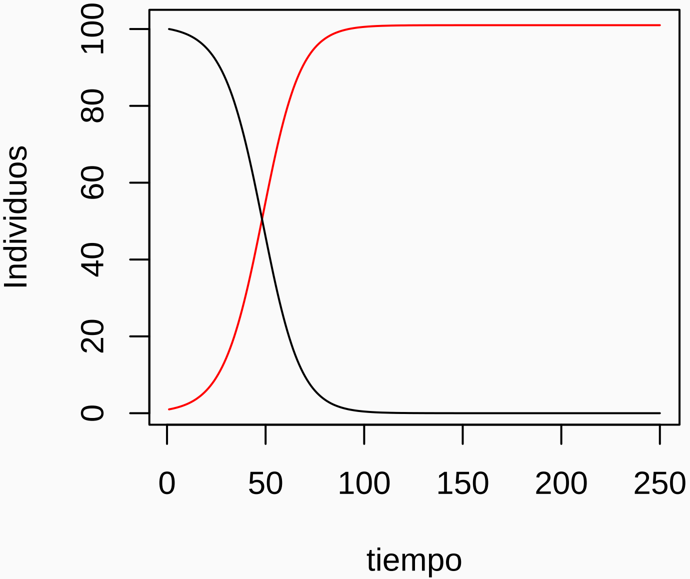

Figure 1: La línea roja representa el número de infectados, y la negra el de

- El modelo SI es equivalente al de metapoblaciones de Levins, donde individuos son los parches de hábitat
- Demostración: si $N = S + I$, y dividimos todo entre N, $s + i = 1$ y $s = 1 - i$
- Sustituyendo en la ecuación para I, tenemos:

$$\frac{di}{dt} = \beta i(1 - i)$$

El modelo SIR

Qué representa

Hay tres estados:

Susceptible $\longrightarrow$ Infectado $\longrightarrow$ Recuperado

Por lo tanto hay tres ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I \tag{5}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I \tag{6}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{7}$$

Parámetros y estado de equilibrio

- β es la tasa de transmisión
- γ, la tasa de recuperación, ó inverso del tiempo de duración de la infección
- El estado de equilibrio también lo encontramos resolviendo para I:

$$\beta S I - \gamma I = 0$$

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma}$$

El concepto R_0

- Equilibrio en SIR es muy diferente de SI
- Al inicio de una epidemia $I \approx 1$, por lo que cuando:

$$I^* = \frac{\beta S}{\gamma} = 1$$

Se conoce como el umbral R_0, y resolviendo para S, tenemos:

$$S = \gamma/\beta$$

¿Qué representa $S = \gamma/\beta$?

R_0

- El tamaño crítico de la comunidad
  - Densidad poblacional debajo de la cual la epidemia no puede crecer
  - Si $S < \gamma/\beta$ la infección se extingue
- Si calculamos β y γ para una comunidad con tamaño poblacional definido:

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}$$

- R_0 sólo tiene sentido al inicio de la epidemia
- En ese estado, representa el número de casos secundarios que genera cada infectado
  - Si $R_0 > 1$, la epidemia crece, si $R_0 < 1$ no habrá epidemia

Modelo SIR con mortalidad en infectados

- Caso revisado hasta ahora, no hay efecto de infección sobre supervivencia
- Infecciones causan mortalidad, por lo que puede ser necesario contemplarla mediante α:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \tag{8}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + \alpha)I \tag{9}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{10}$$

Esquema

Modelos de transmisión frecuento-dependiente

Intro

- Denso-dependencia se basa en densidad crítica de permite transmisión
- Frecuento-dependencia, no requiere densidad mínima
    - Representa enfermedades con dinámicas de transmisión más lenta

Denso-dependencia, ó acción de pseudo-masas:

$$\beta SI$$

Frecuento-dependencia:

$$\beta S \frac{I}{N}$$

donde I/N es ...

La prevalencia de la infección

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S \frac{I}{N} \tag{11}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - \gamma I \tag{12}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{13}$$

A este modelo se pueden añadir términos igual que al denso-dependiente

Condiciones de estabilidad

Derivemos la expresión para R_0, tomando en cuenta que $N = S + I$:

1. $\beta - \gamma I = 0$
2. $\beta \frac{SI}{S+I} = \gamma(S + I)$
3. Debido que al inicio de la epidemia $S \approx N$:

$$\beta I = \gamma I \rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = 1$$

Las condiciones que evitarían la epidemia dependen de β y γ, no de S

Caos en el modelo SIR

Eliminando la dimensionalidad del modelo

- Transformar tamaños poblacionales en proporciones, con base en:

$$N = S + I + R \tag{14}$$

$$s = S/N \tag{15}$$

$$i = I/N \tag{16}$$

$$r = R/N \tag{17}$$

$$n = 1 = N/N \tag{18}$$

El sistema de ecuaciones

$$\frac{ds}{dt} = n - \beta si - \mu s \tag{19}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - (\gamma + \alpha + \mu)i \tag{20}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r \tag{21}$$

La función de deSolve

```
sir <- function(t, y, parms){
  s <- y[1]
  i <- y[2]
  r <- y[3]
  with(parms,
       {
         ds <- n * s - beta * s * i - mu * s
         di <- beta * s * i - (alfa + mu + gamma) * i
         dr <- gamma * i  - mu * r

         return(list(c(ds, di, dr)))
       })
}
```

Las dinámicas oscilatorias de SIR