

Los patrones de puntos y modelos estadísticos *ad-hoc*

Gerardo Martín

Contenidos

Los patrones de puntos

Consideraciones sobre los datos

Tipos de patrones de puntos

Propiedades

La modelación

Las matemáticas

Consideraciones prácticas

Consideraciones de los datos



Tiempo →

¿Cuántos gramos diarios crece el pollo?

Si ajustamos un modelo estadístico del tipo:

$$\begin{aligned}Peso_{t+1} &= c \, Peso_t \\Peso(t) &= Peso_0 e^{ct} \\Peso(t) &= a + b \, t\end{aligned}$$

¿Qué unidades produce el modelo?

Datos de pesos



Modelo para los pesos



Unidades de peso

Tipo de datos en modelación correlativa de nichos y áreas de distribución



x, y
98.1, -19.3
97.1, -18.9
97.13, -17.3
99.5, -20.3
98.3, -21.01

Datos de ubicación espacial
(coordenadas)



Modelo para la ubicación



¿Unidades?

¿Cómo le llamamos tradicionalmente, en MNE, a las unidades de predicción?

¿Cómo le llamamos tradicionalmente, en MNE, a las unidades de predicción?

Coordenadas $\rightarrow$ Idoneidad

¿De dónde viene esta transformación?

Buena parte de la literatura tiene una desconexión
conceptual

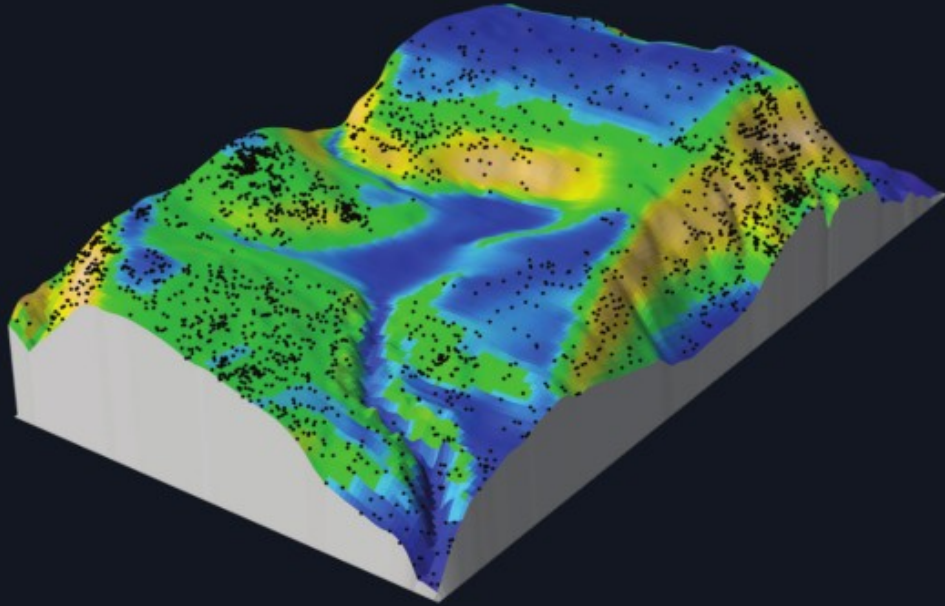
Comprender → Interpretar biológicamente

Los patrones de puntos

Definiciones, Características y Tipos

Spatial Point Patterns

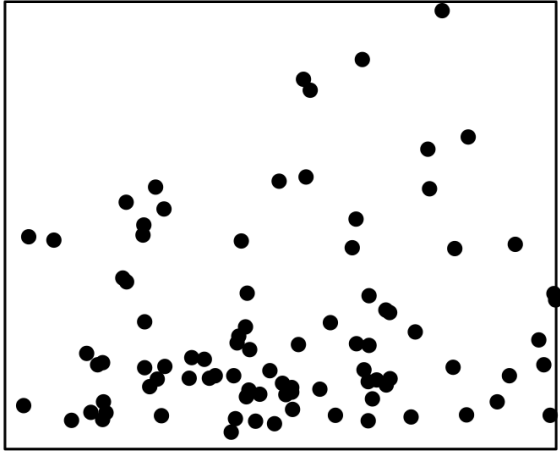
Methodology and Applications with R



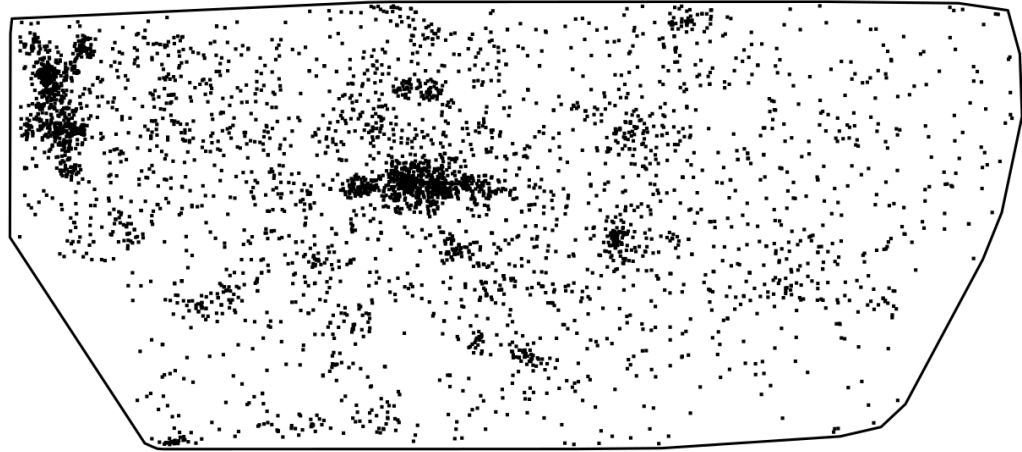
A. Baddeley, E. Rubak and
R. Turner. Spatial Point
Patterns: Methodology and
Applications with R.
Chapman and Hall/CRC
Press, 2015.

Adrian Baddeley • Ege Rubak • Rolf Turner

Colección de eventos discretos distribuidos en un área



Ubicación de células
de mucosa gástrica



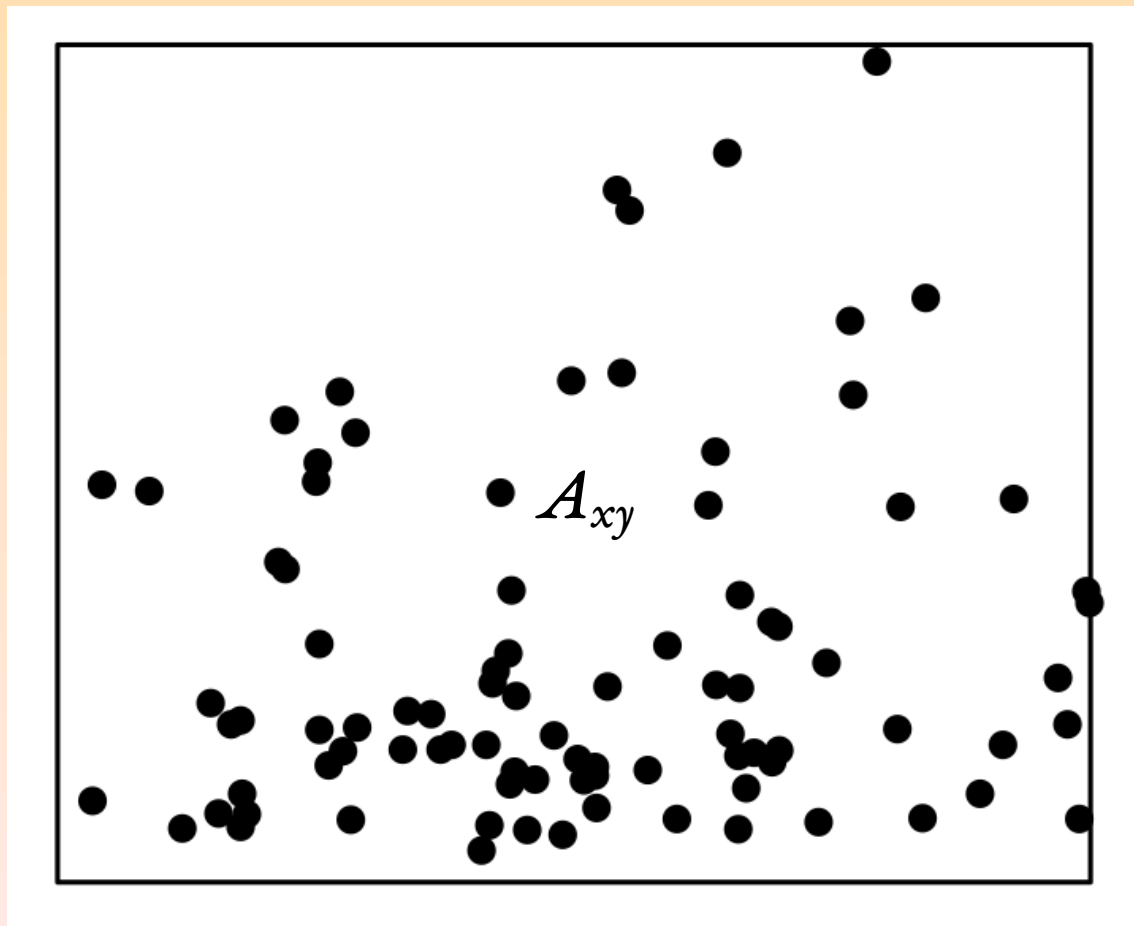
Cúmulos de galaxias

Dispersión de datos univariados es simple (media, varianza, etc.), ¿cómo podría describirse (simplemente) la dispersión de coordenadas?

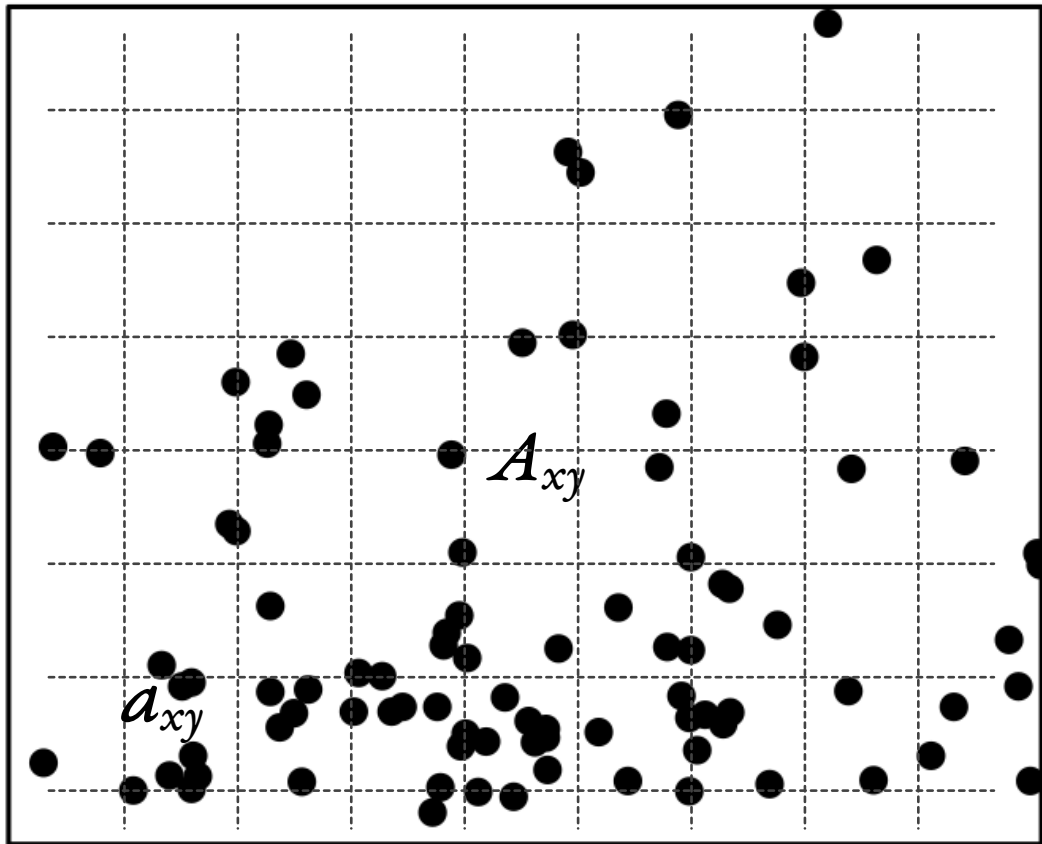
Dispersión de datos univariados es simple (media, varianza, etc.), ¿cómo podría describirse (simplemente) la dispersión de coordenadas?

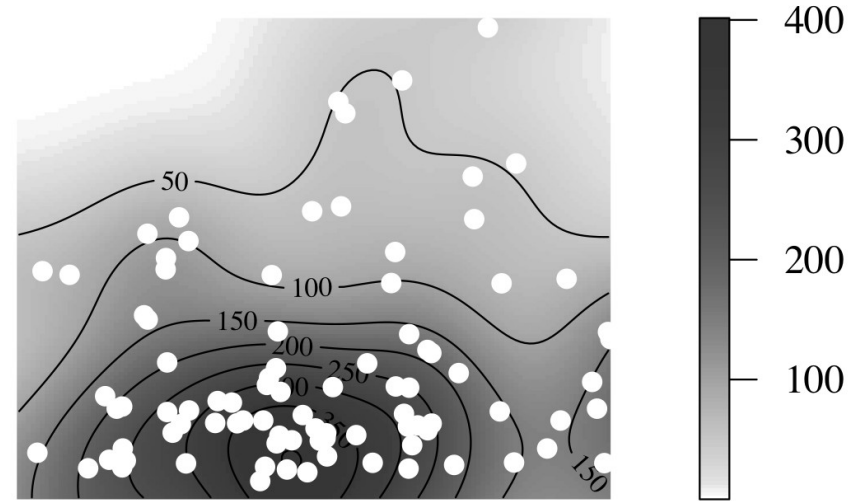
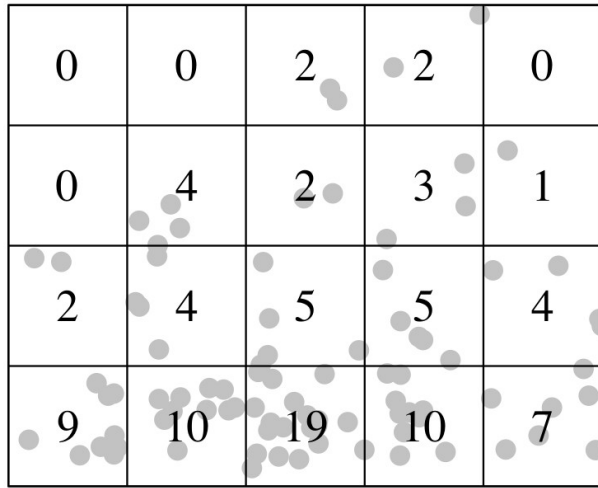
Tip: las coordenadas no existen aisladas, existen en área definida

Δy



Δx

Δy dy a_{xy} dx A_{xy} Δx 



Dividir A en unidades $\rightarrow$ puntos discretos se convierten en densidades

Unidades de análisis $\rightarrow$ Puntos por unidad de área

¿Ejemplo de modelo estadístico para conteos?

$$f(\kappa, \lambda) = P(X = \kappa) = \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$$

Distribución de probabilidad Poisson

λ Media

κ Valor de X , $\kappa \in N$

Probabilidad de que elementos de $X = \kappa$

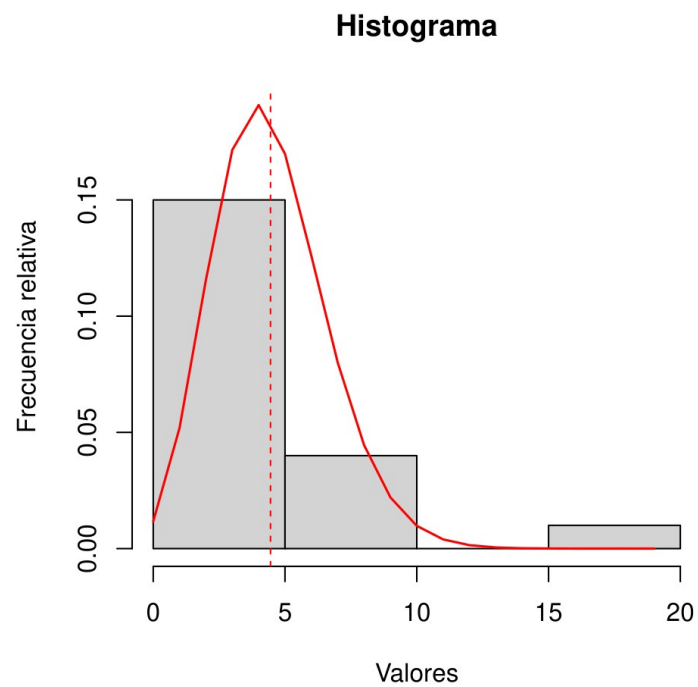
0	0	2	2	0
0	4	2	3	1
2	4	5	5	4
9	10	19	10	7

$$f(\kappa, \lambda) = P(X = \kappa) = \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

0	0	2	2	0
0	4	2	3	1
2	4	5	5	4
9	10	19	10	7



✓ Comprensión de dispersión de
datos de ubicación

✓ Bases para pruebas e hipótesis sobre
dispersión

¿Qué nos falta comprender para hacer
inferencia?

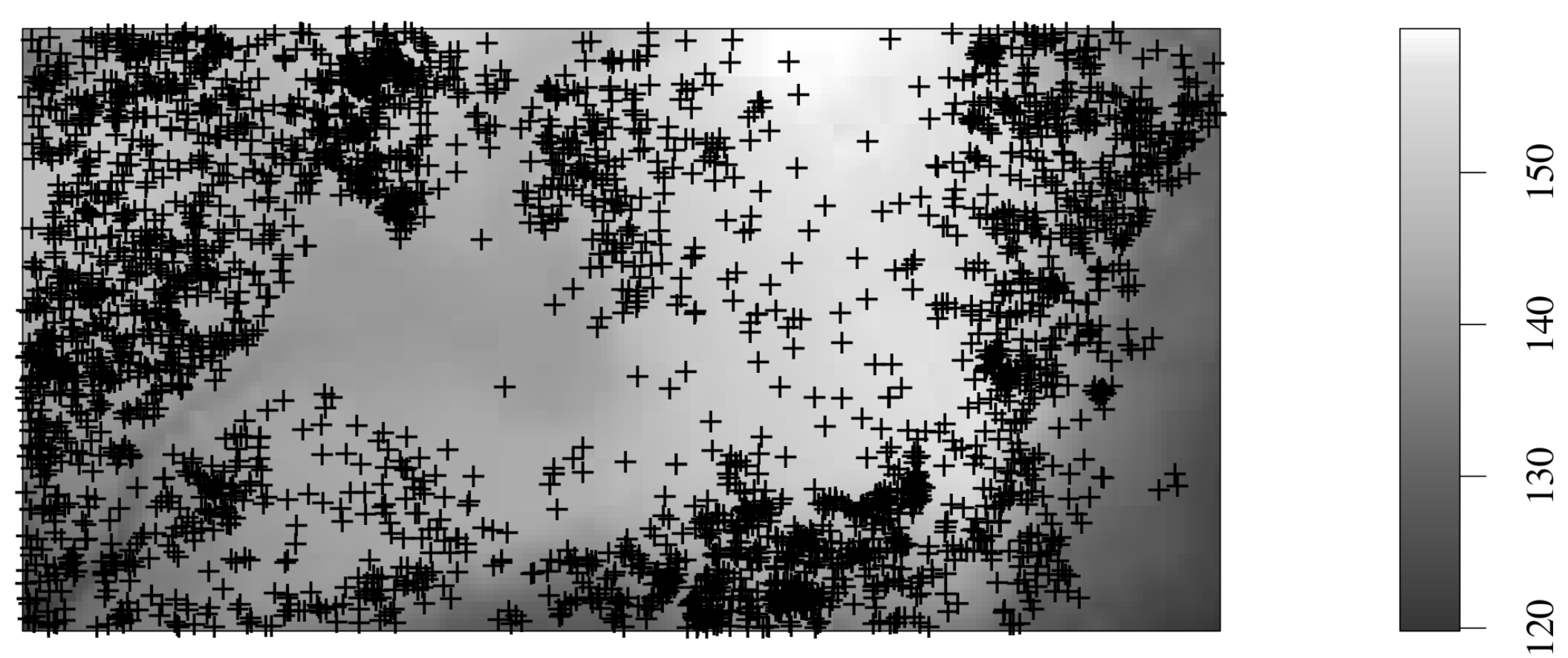
✓ Comprensión de dispersión de
datos de ubicación

✓ Bases para pruebas e hipótesis sobre
dispersión

¿Qué nos falta comprender para hacer
inferencia?

Tip: Organismos no están aislados,
existen rodeados de fenómenos

Tipos de patrones de puntos



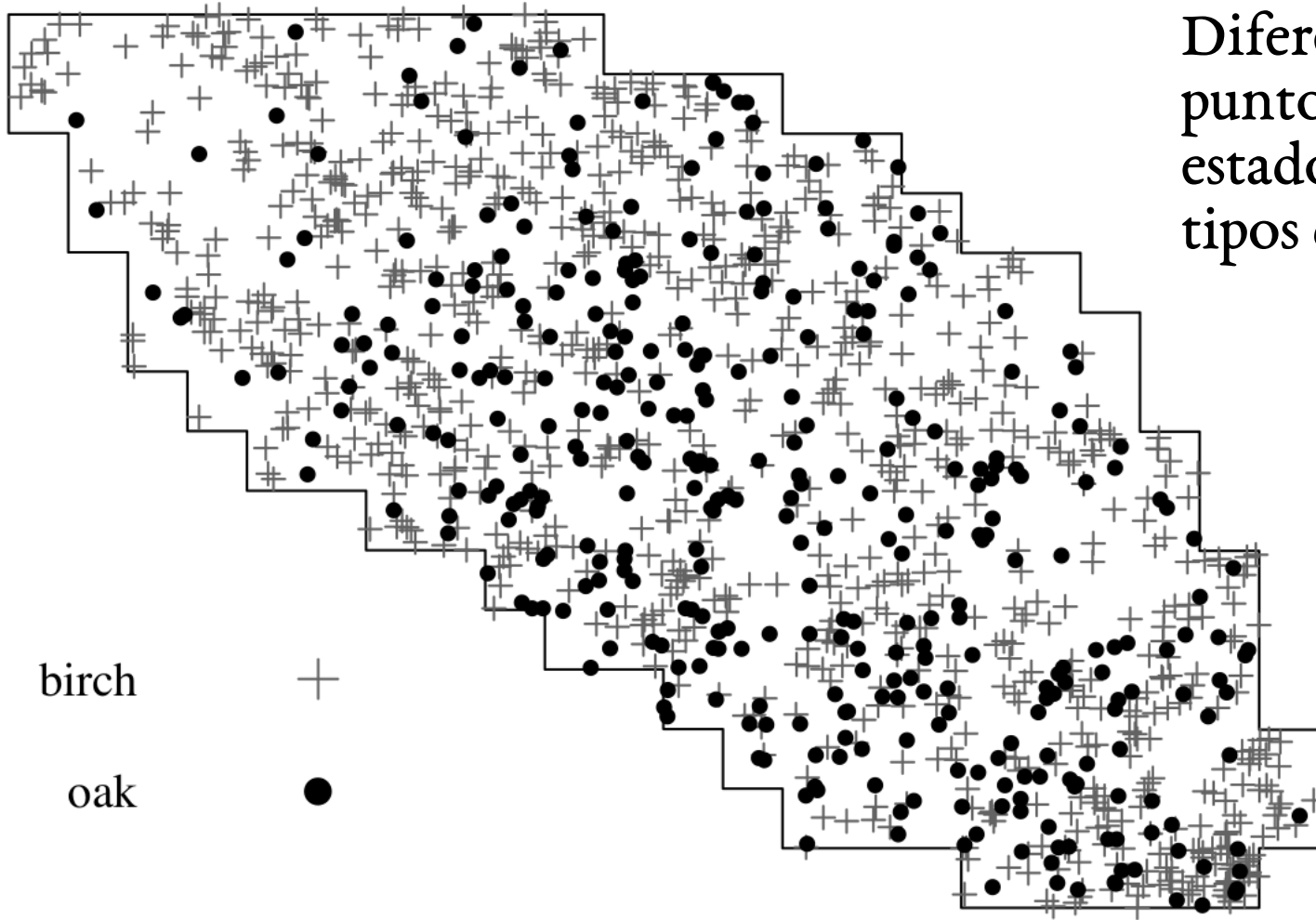
Definidos en relación a covariables ambientales. Individuos de *Beilschmiedia pendula* en relación a modelo digital de elevación.

Diferentes tipos de
puntos (especies,
estados de desarrollo,
tipos de objetos, etc.).

birch



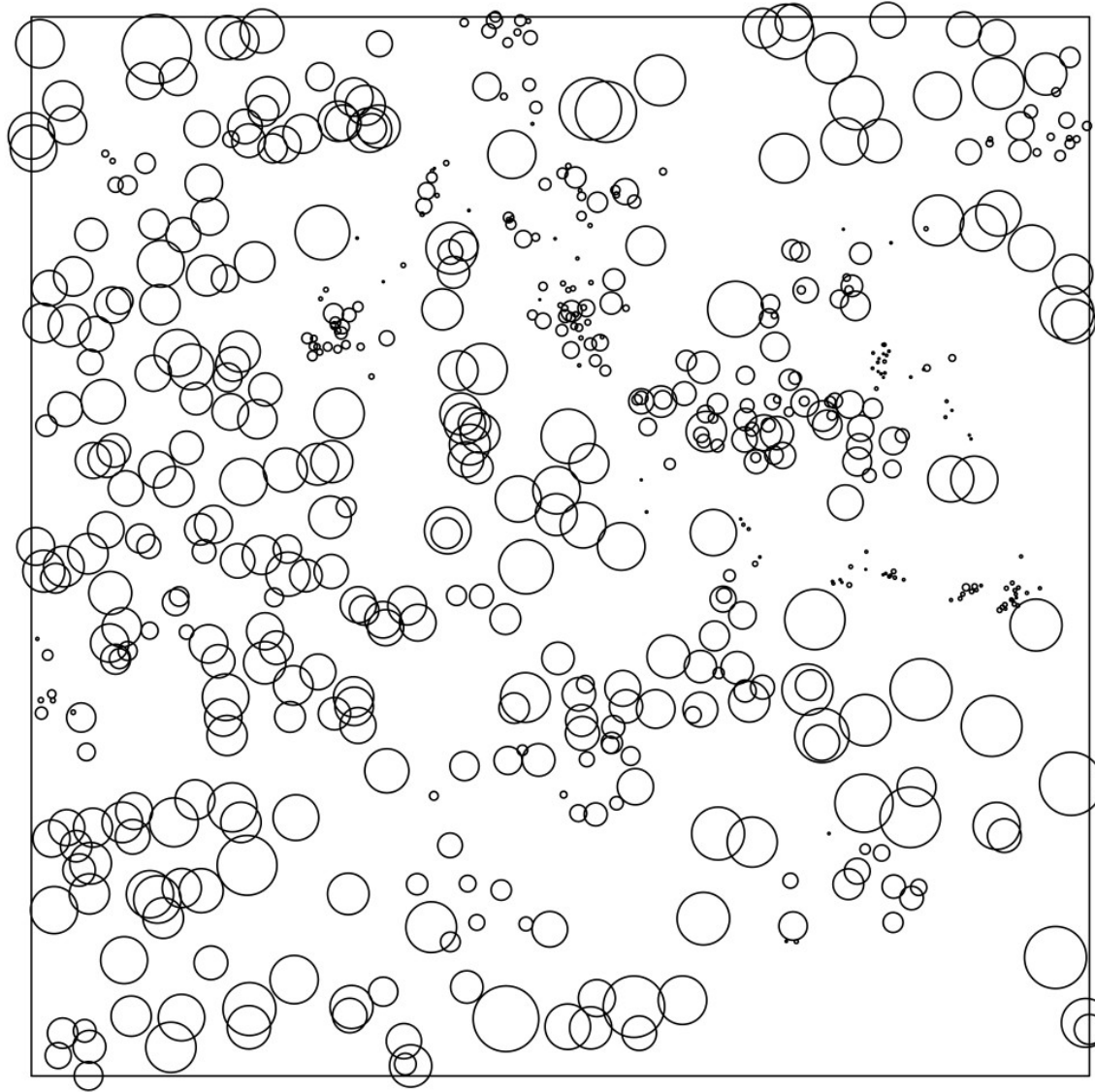
oak



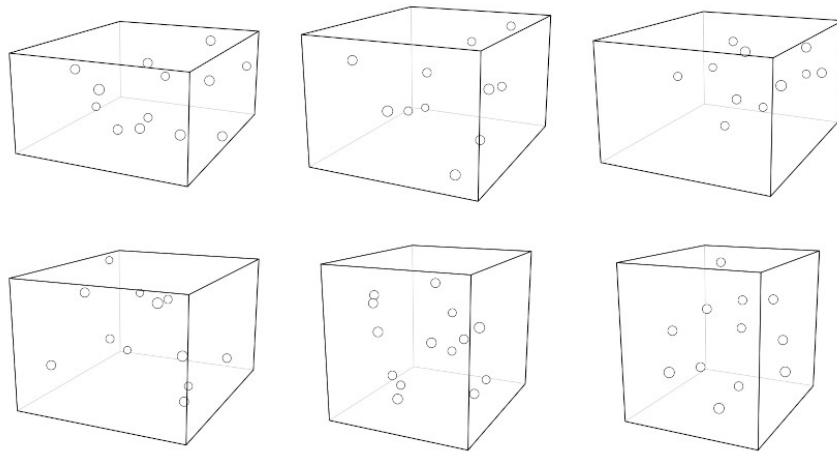
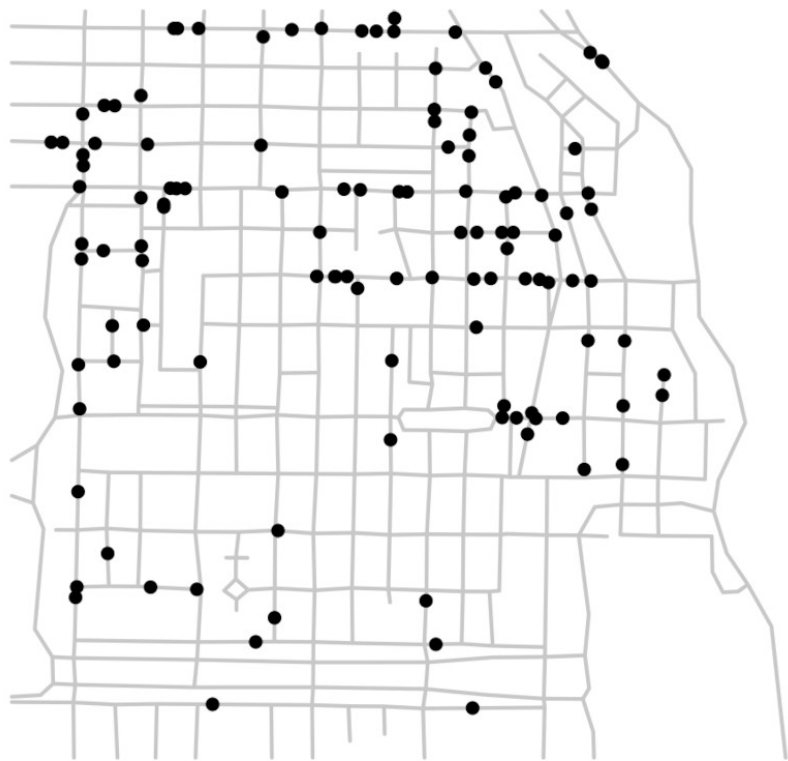
60

40

20



Coordenadas
con
magnitudes o
mediciones



Pueden presentarse en más o
menos dimensiones

Propiedades de los patrones de puntos

0	0	2	2	0
0	4	2	3	1
2	4	5	5	4
9	10	19	10	7

$$f(\kappa, \lambda) = P(X = \kappa) = \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

¿Qué características podría tener X que invalidan al modelo Poisson para describirla?

¿Qué características podría tener X que invalidan al modelo Poisson para describirla?

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

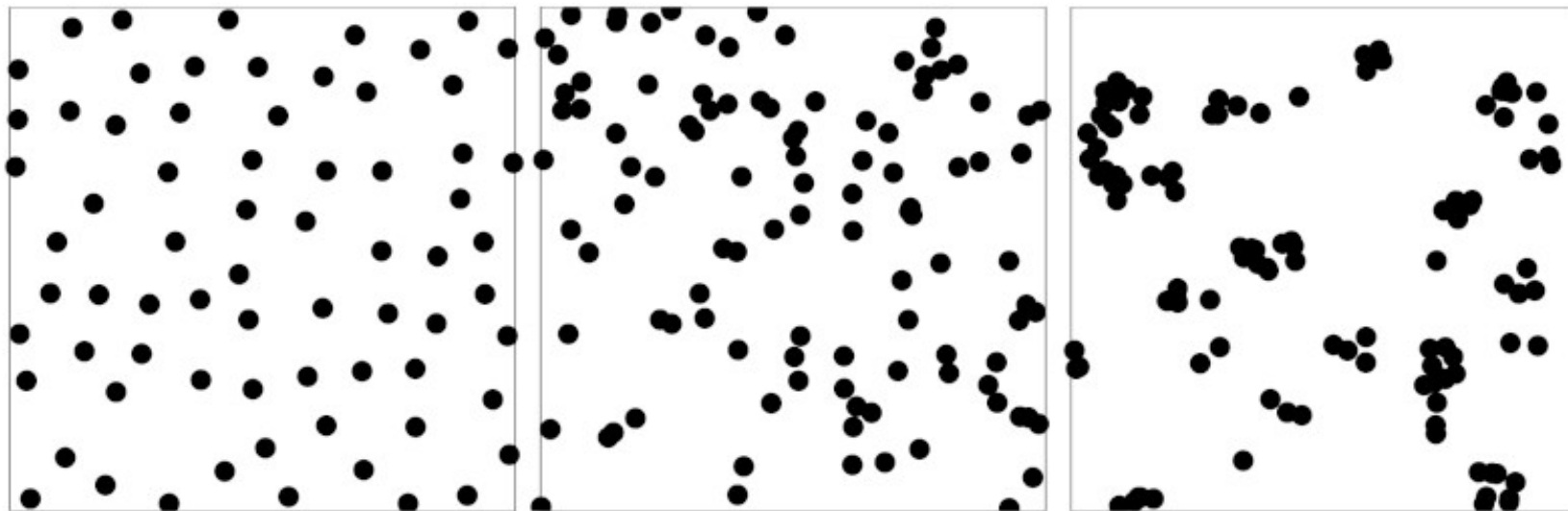
¿Qué características podría tener X que invalidan al modelo Poisson para describirla?

$$E(X) \neq Var(x)$$

¿Qué características podría tener X que invalidan al modelo Poisson para describirla?

$$E(X) > Var(x)$$

$$E(X) < Var(x)$$

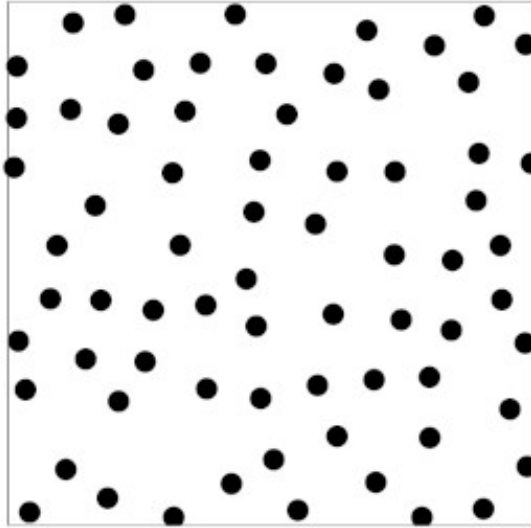


¿Descripciones?

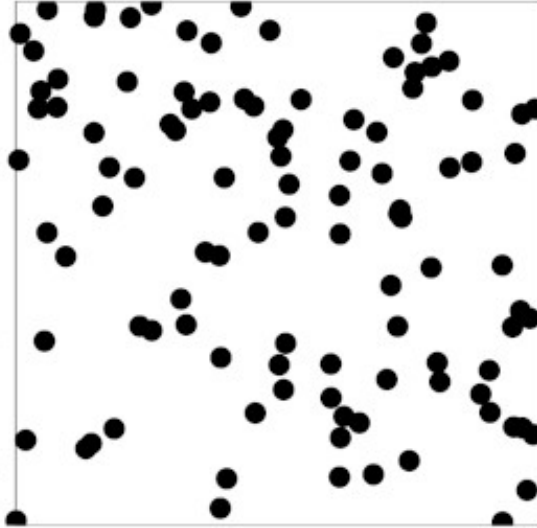
$$E(X) = \lambda > Var(X)$$

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

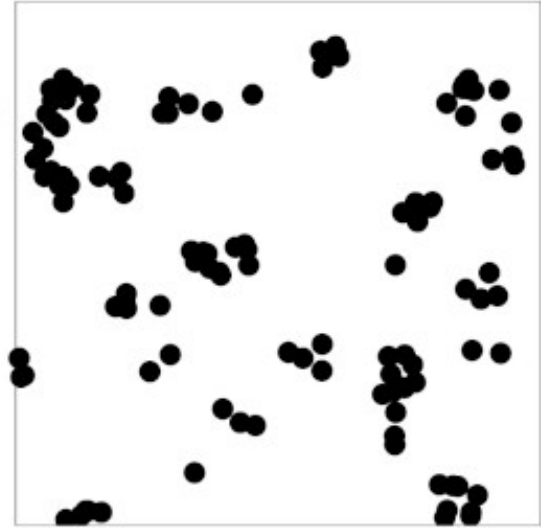
$$E(X) = \lambda < Var(X)$$



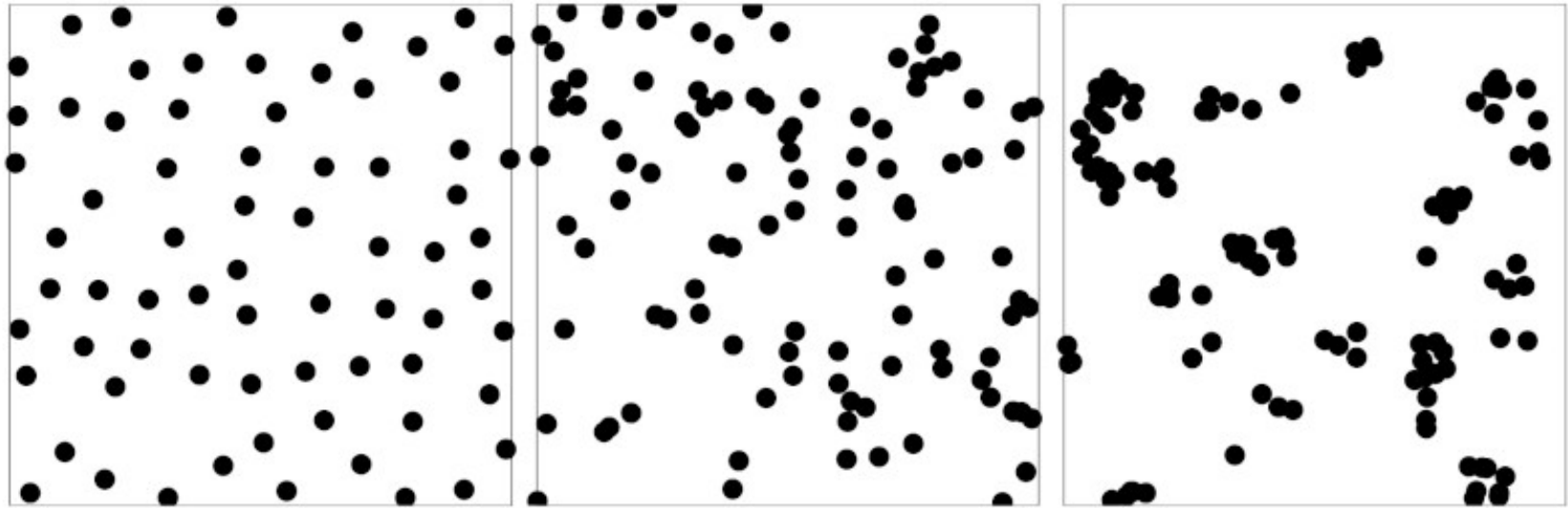
Uniforme,
segregado



Aleatorio

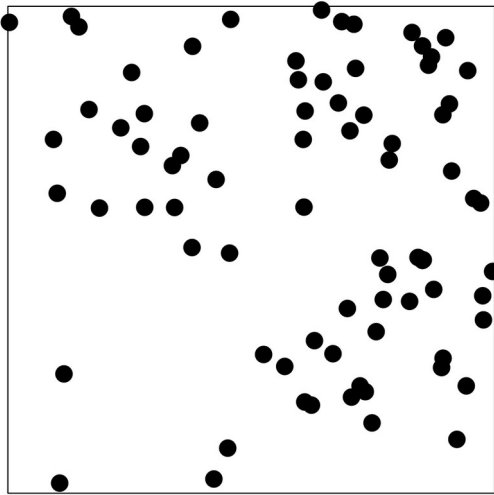


Agregado

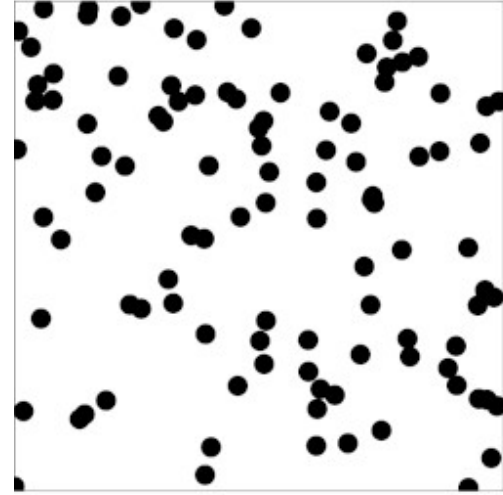


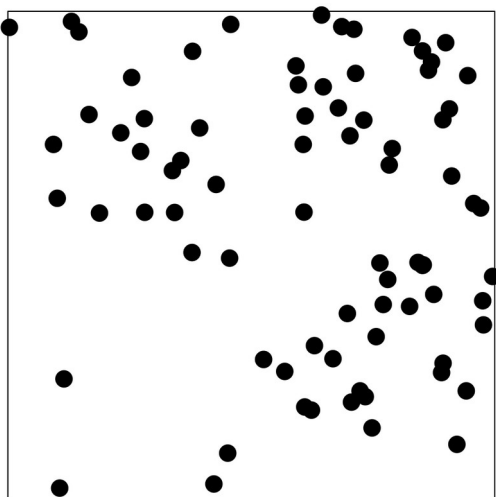
¿Qué procesos biológicos o ecológicos podrían generar estos patrones?

Un caso adicional ...

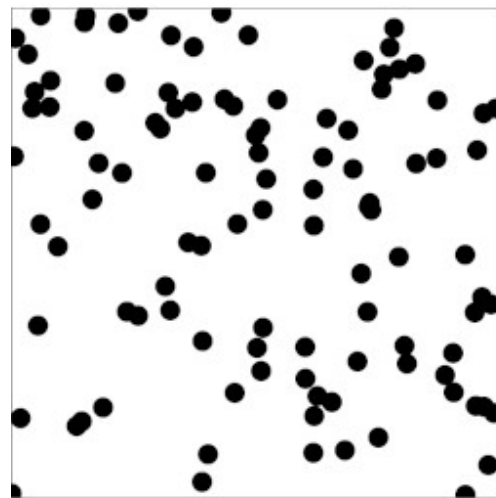


VS

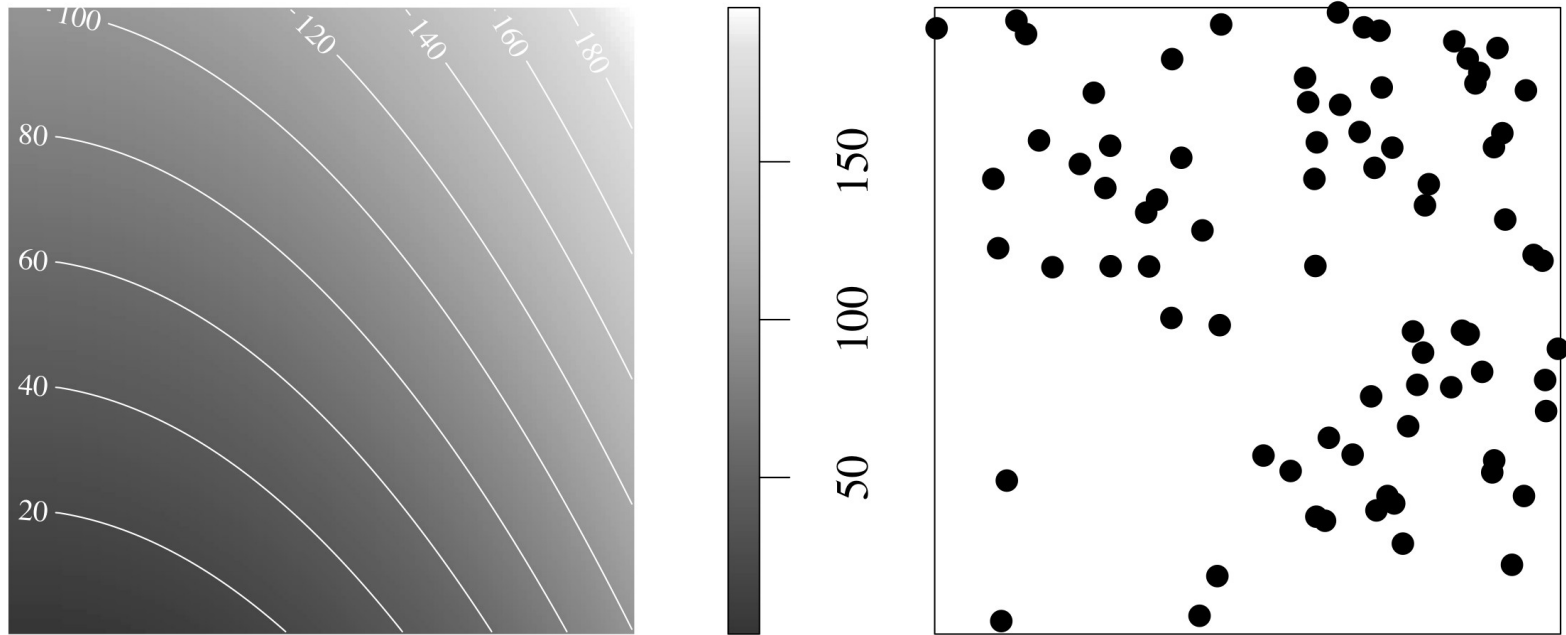




Heterogéneo



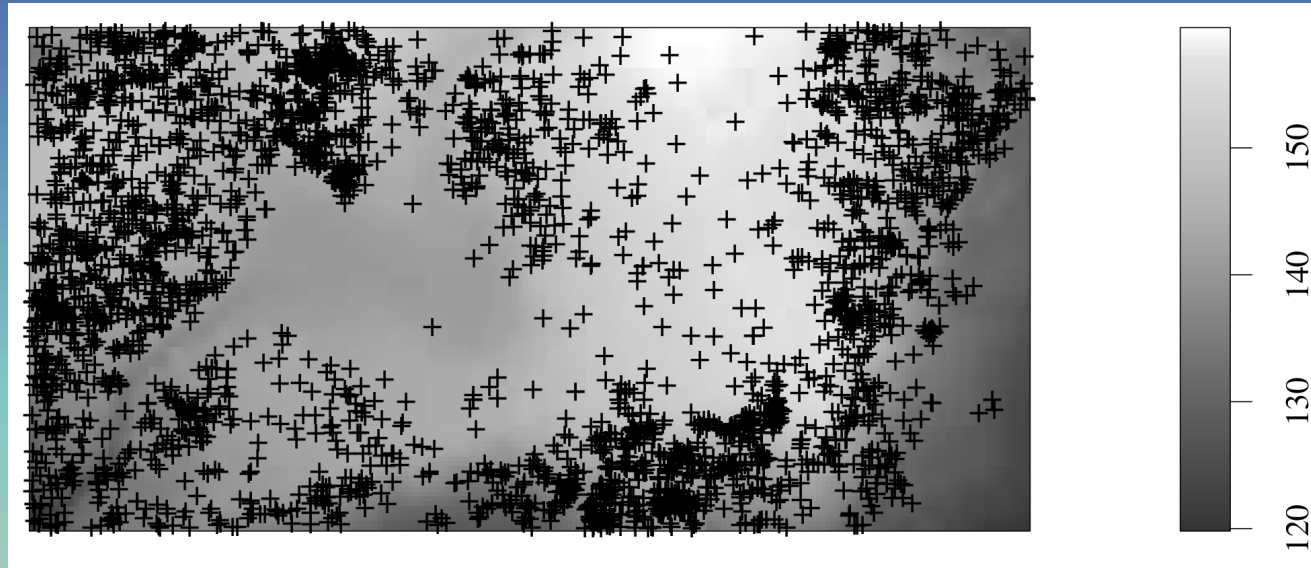
Homogéneo



En los patrones de puntos heterogéneos hay regiones de mayor densidad de puntos, **posiblemente** producto de factores ambientales

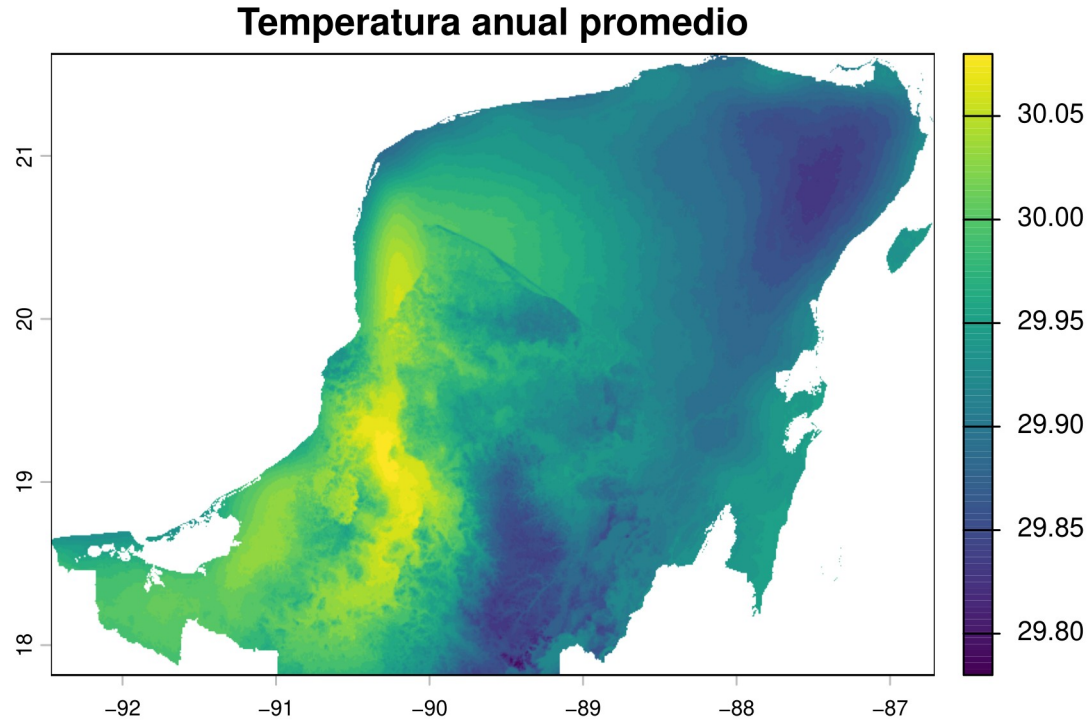
Bases probabilísticas para la modelación de patrones de puntos

Variación de densidades de *Beilschmiedia pendula* es función de la elevación



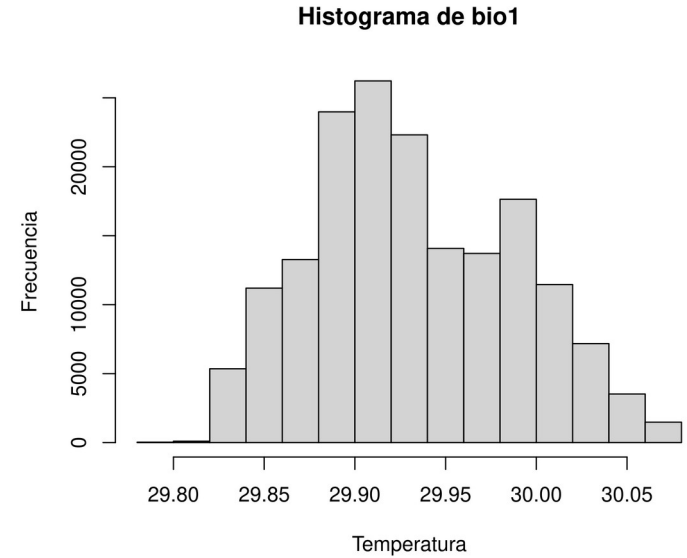
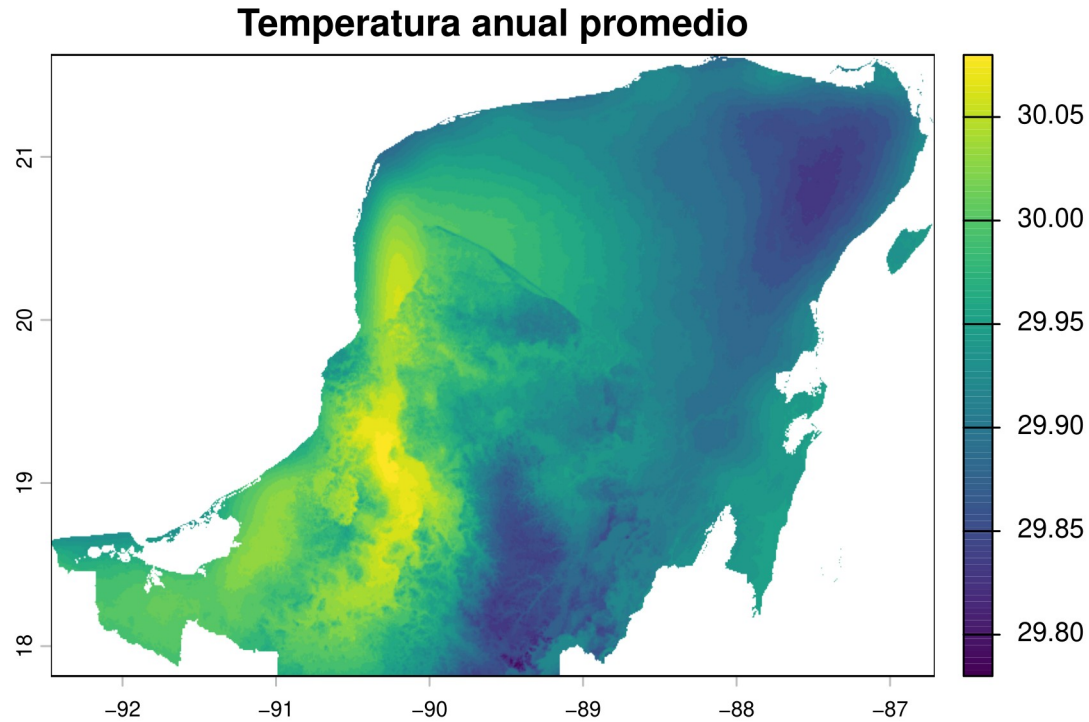
Cómo podemos aplicar la división del área de estudio en unidades espaciales a una covariable, de tal modo que:

$$\log \lambda = \beta_0 + \beta_1 \text{Elevación}$$

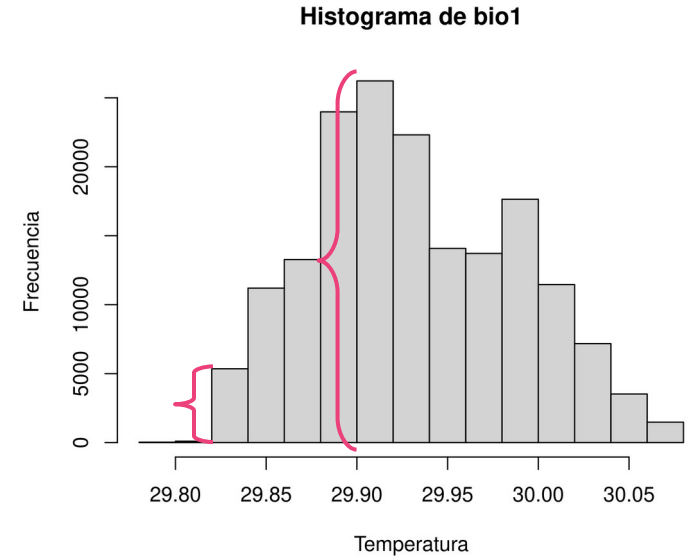
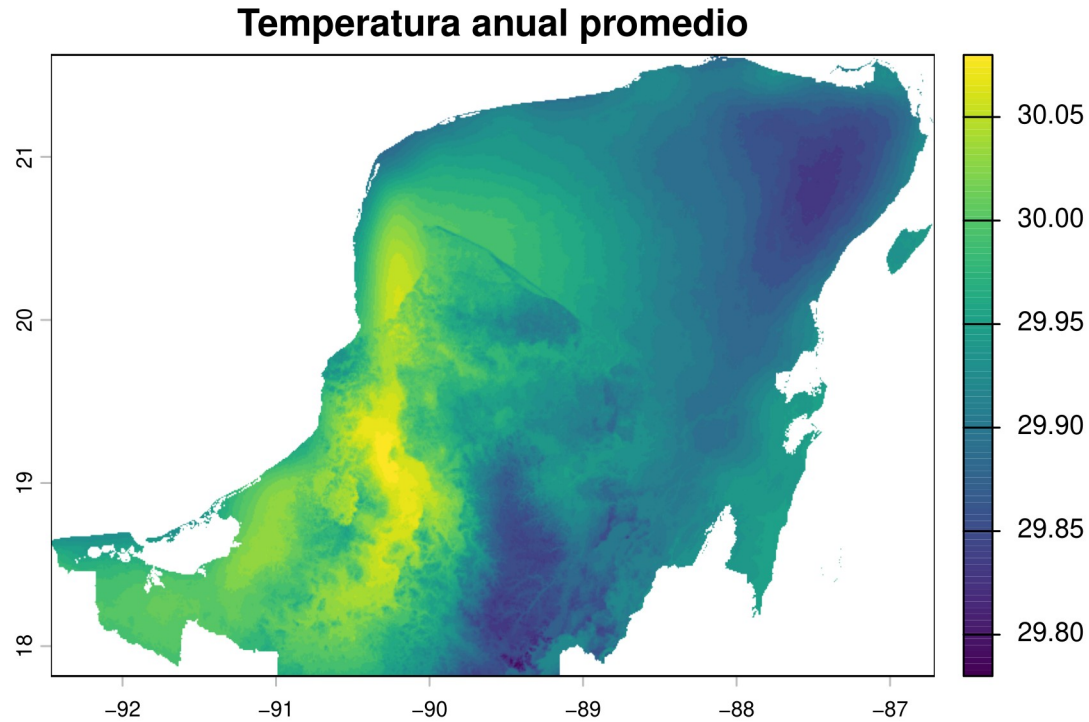


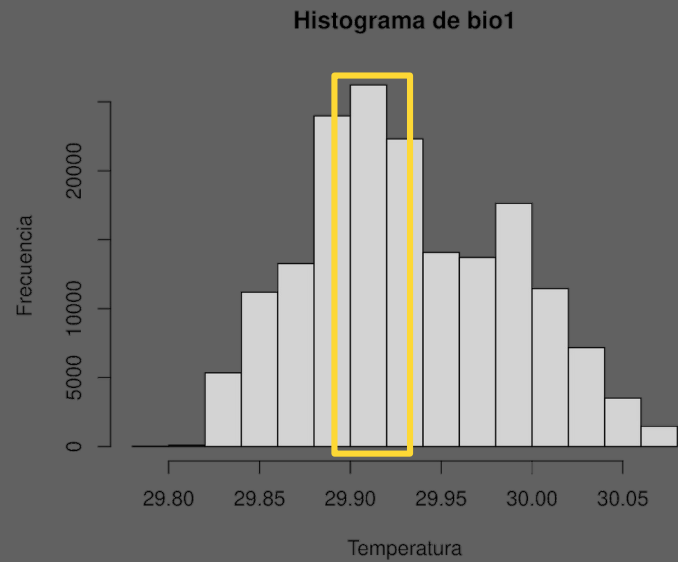
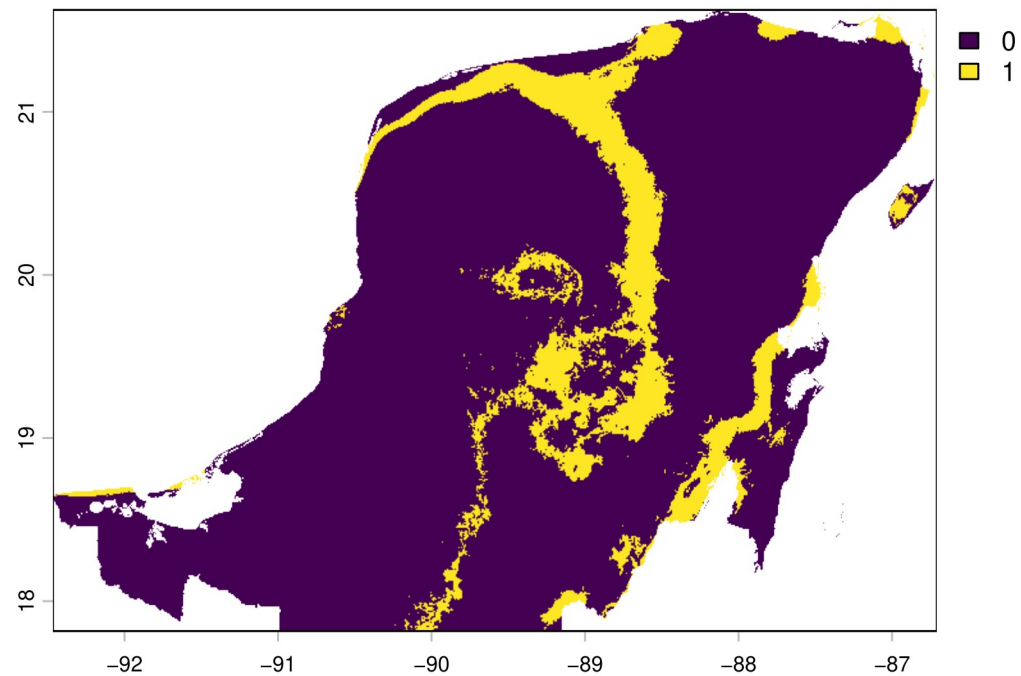
Variación
geográfica de
la temperatura
anual
promedio
(bior)

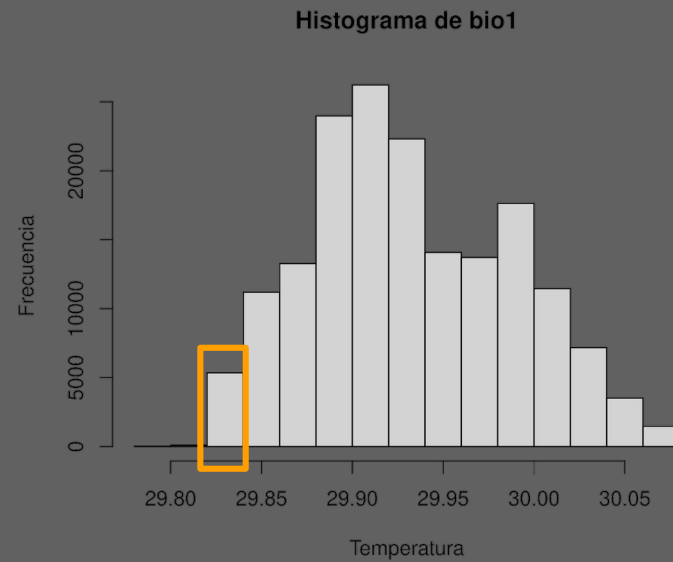
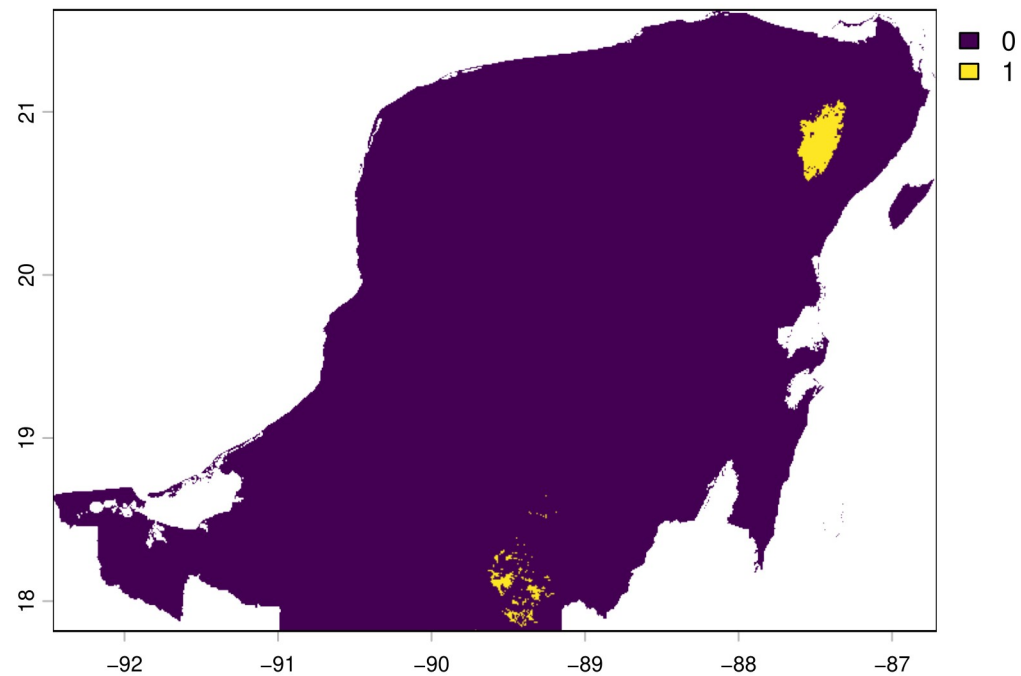
Podemos representar variación
mediante herramientas tradicionales

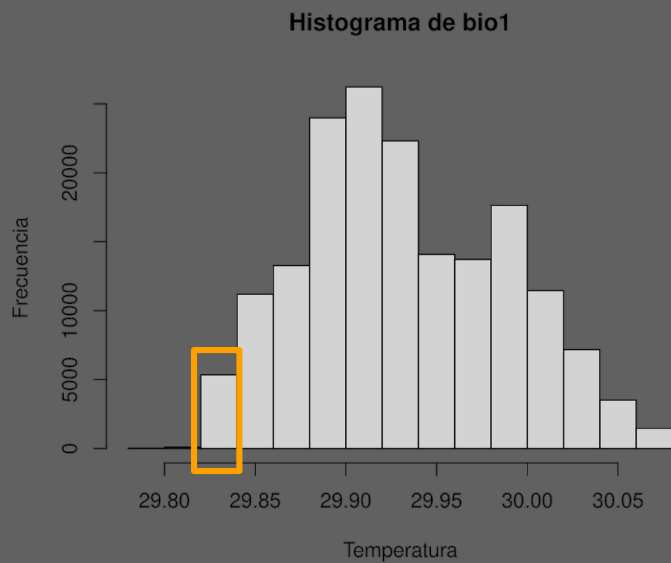


Espacialmente, ¿qué representa la altura de las barras?

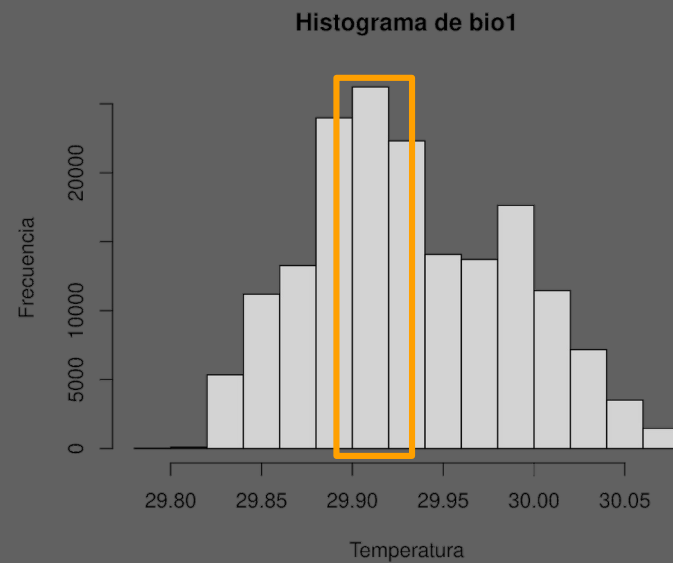




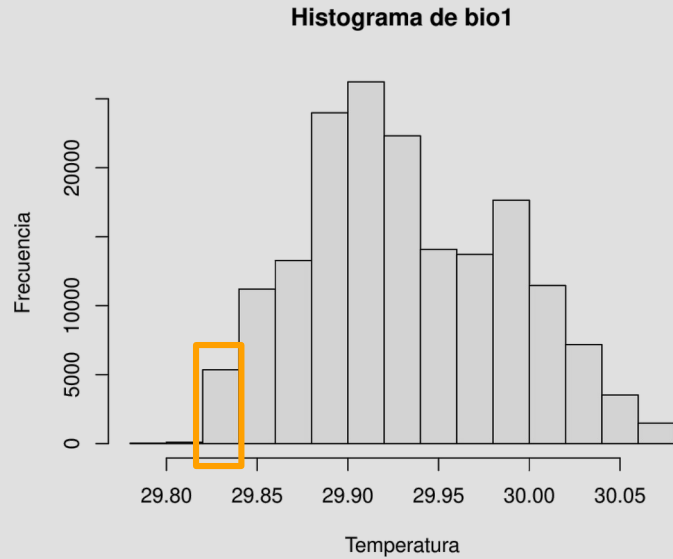




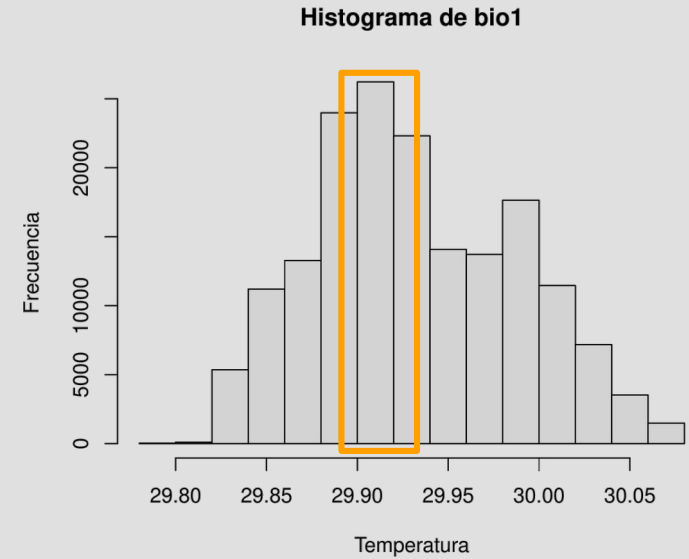
0.9% del área total



13.43% del área total



VS

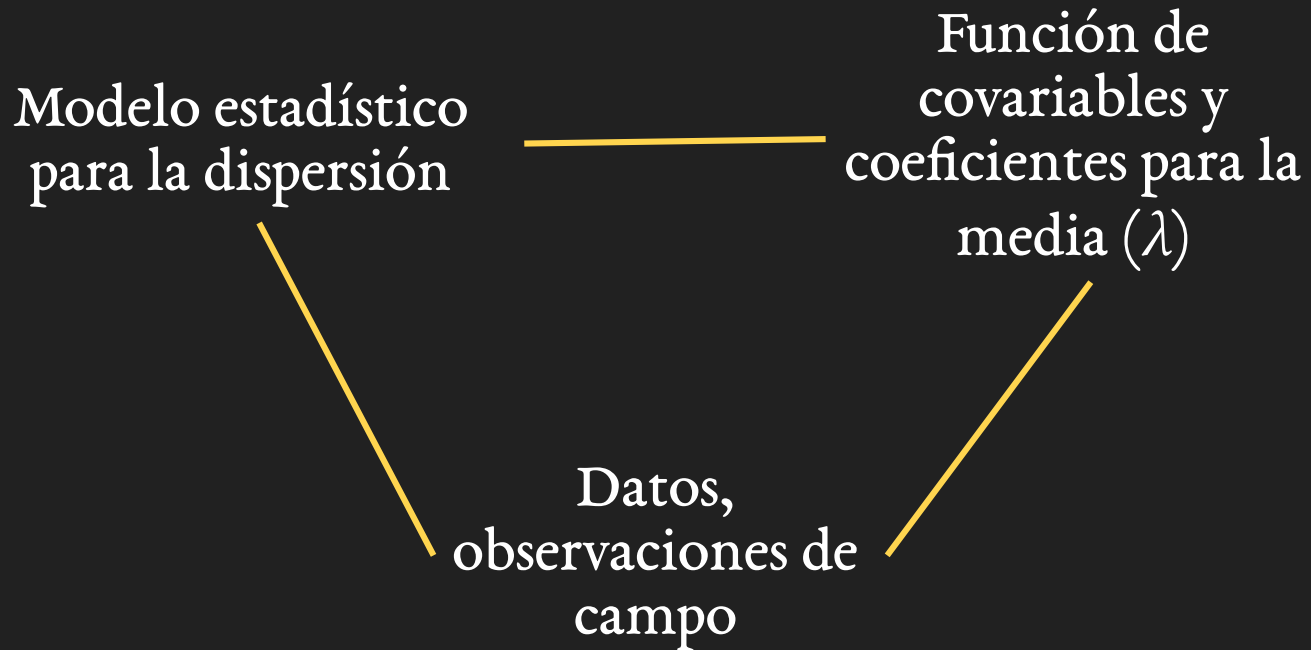


$13.43 / 0.9 = 14.92$ veces más probable

El mismo principio de cociente de áreas se aplica a las condiciones en que ocurren los puntos, para los conjuntos de valores de las covariables

Las Matemáticas

La función de verosimilitud



La función de verosimilitud

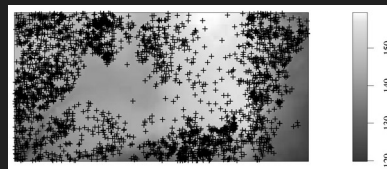
$$\log \lambda(\theta, X) = \beta_0 + \beta_1 X$$
$$\theta = \{\beta_0, \beta_1\}$$

$$f(\kappa, \lambda) = P(X = \kappa) \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$$

Modelo estadístico
para la dispersión

Función de
covariables y
coeficientes para la
media (λ)

Datos,
observaciones de
campo



La verosimilitud de un proceso Poisson

$$\mathbf{x}_i = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$
$$\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda(\mathbf{x}_i) - \int_W \lambda(u) du$$

Datos de presencia

Número total de puntos esperados en el área de estudio, imposible de aproximar

Ventana de estudio

Verosimilitud modificada

$$\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda(x_i) - \int_W \lambda(u) du$$

$$\int_W \lambda(u) du \approx \sum_{j=1}^M w_j \lambda(u_j)$$

$$\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda(x_i) - \sum_{j=1}^M w_j \lambda(u_j)$$

Número total de puntos esperados en el área de estudio

Esquema de cuadratura

Áreas de cada unidad espacial (píxeles de capa ráster)

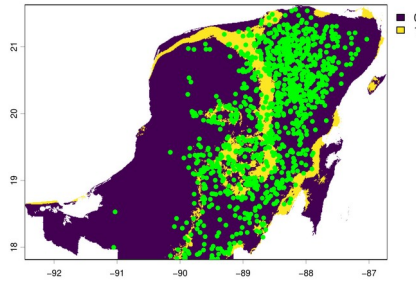
Verosimilitud modificada

$$\log L(\lambda) \approx \sum_{j=1}^M w_j (y_j \log \lambda(u_j) - \lambda(u_j))$$

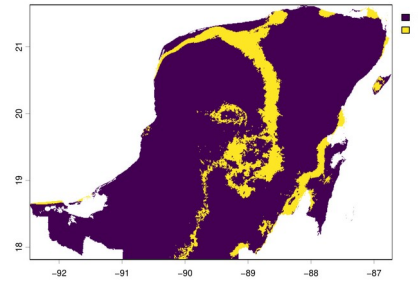
$y_j = n / w_j$, si hay n puntos en unidad u_j
 $y = 0$, si u_j no tiene puntos de presencia

El esquema de cuadratura

$$\log L(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda(x_i) - \sum_{j=1}^M w_j \lambda(u_j)$$



Área = 0.17



Área = 0.13

Cociente = 0.17 / 0.13 = 1.3

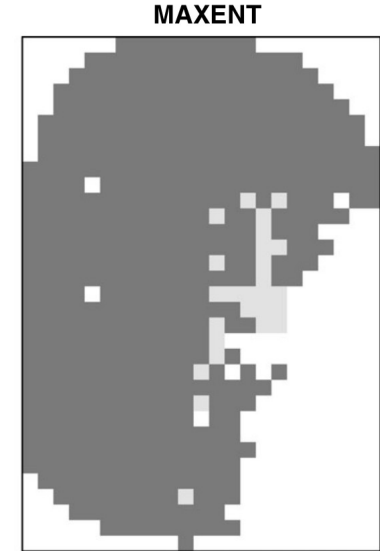
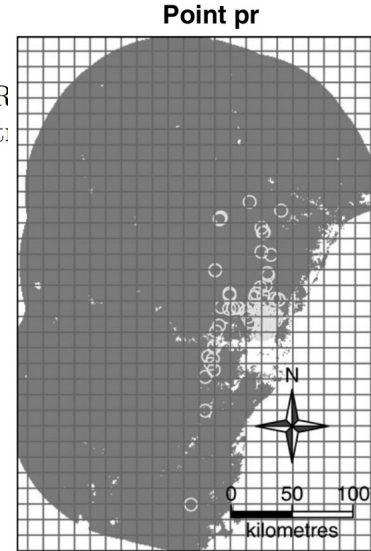
Equivalence of MAXENT and Poisson Point Process Models for Species Distribution Modeling in Ecology

Ian W. Renner* and David I. Warton

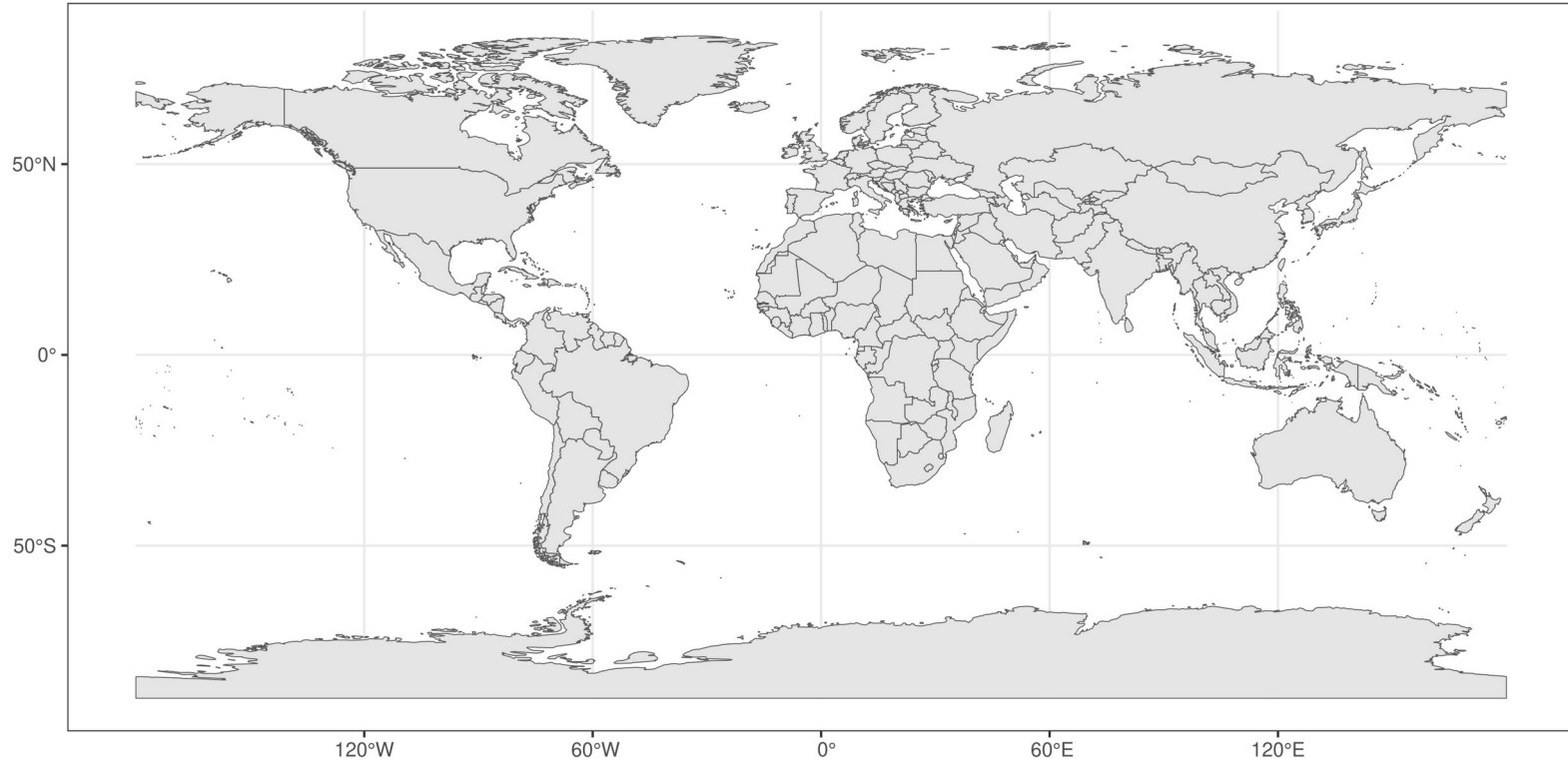
School of Mathematics and Statistics and Evolution & Ecology B
The University of New South Wales, NSW 2052, Australia

**email*: Ian.Renner@unsw.edu.au

Los patrones de puntos y Maxent, son
matemáticamente equivalentes, la diferencia
principal, es computacional

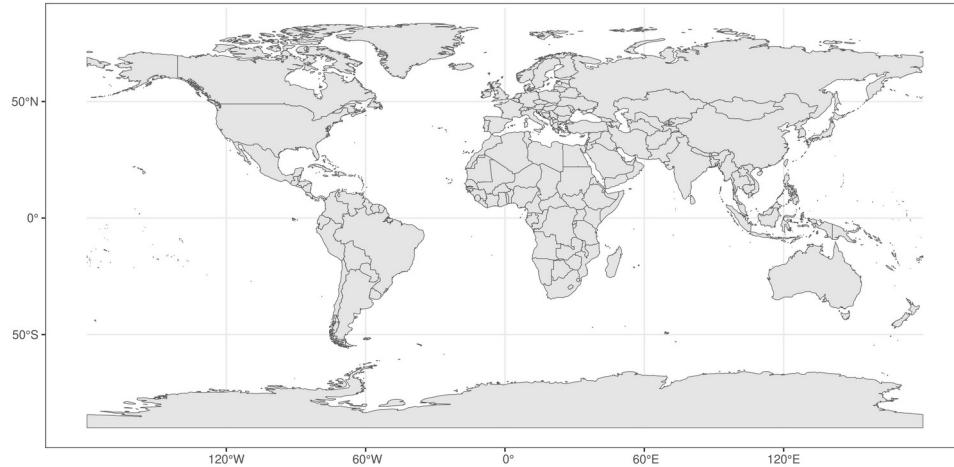


Consideración geográfico-práctica

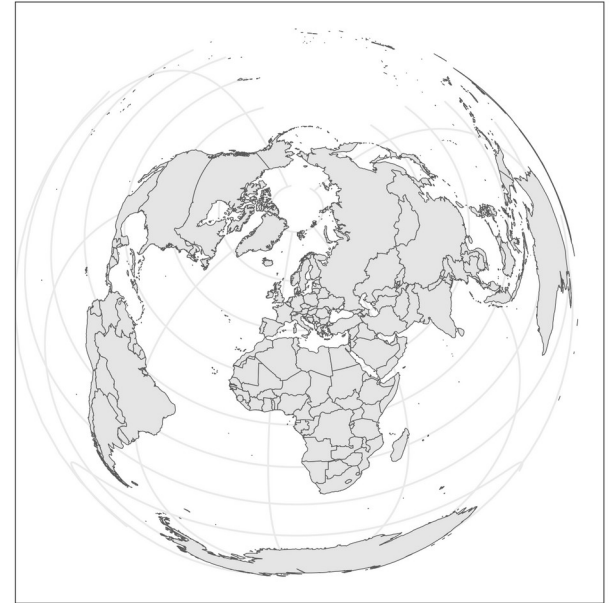


Consideración geográfico-práctica

Deformación de áreas, la base de toda la modelación de patrones de puntos



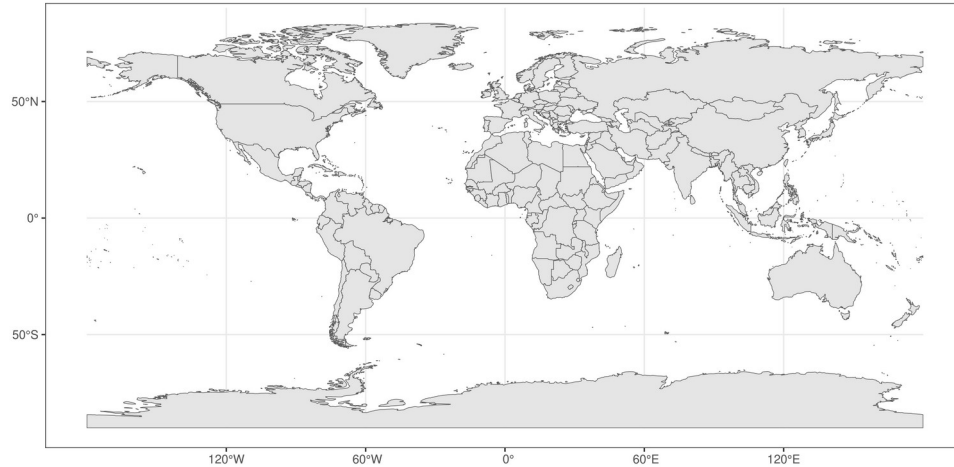
Coordenadas geográficas



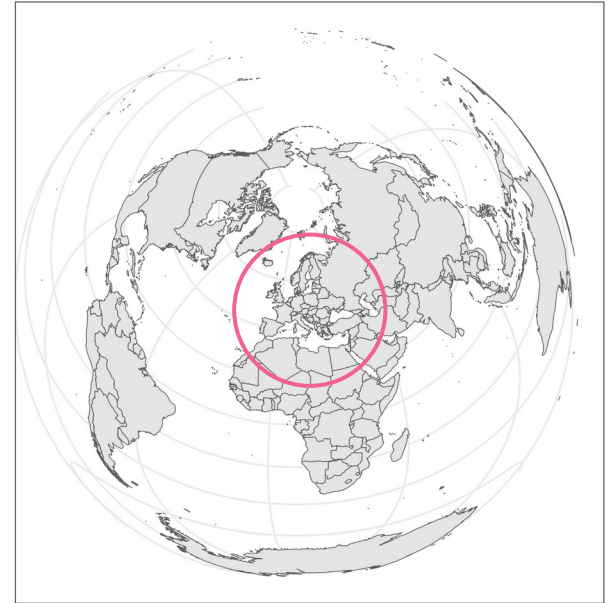
Coordenadas proyectadas

Consideración geográfico-práctica

Mejor representación local de áreas
Pésima representación distante de áreas



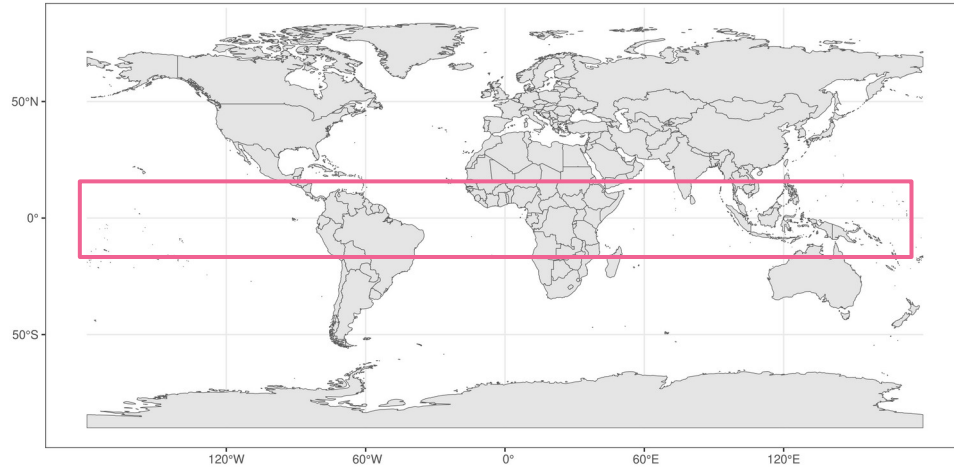
Coordenadas geográficas



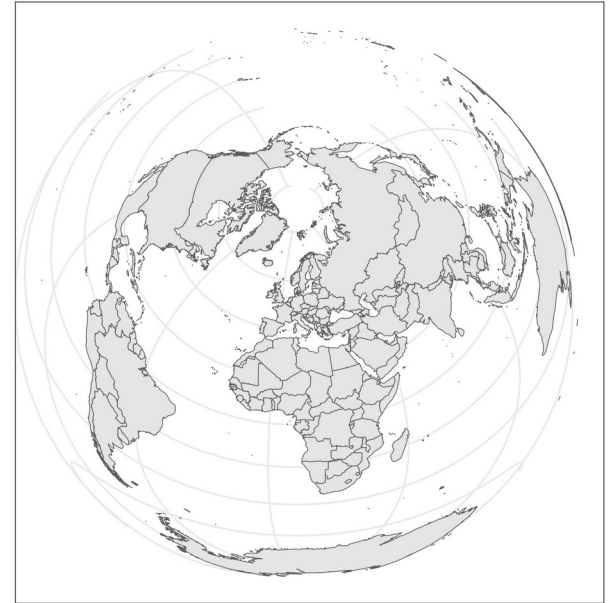
Coordenadas proyectadas

Consideración geográfico-práctica

Representación ecuatorial decente
Pésima representación polar

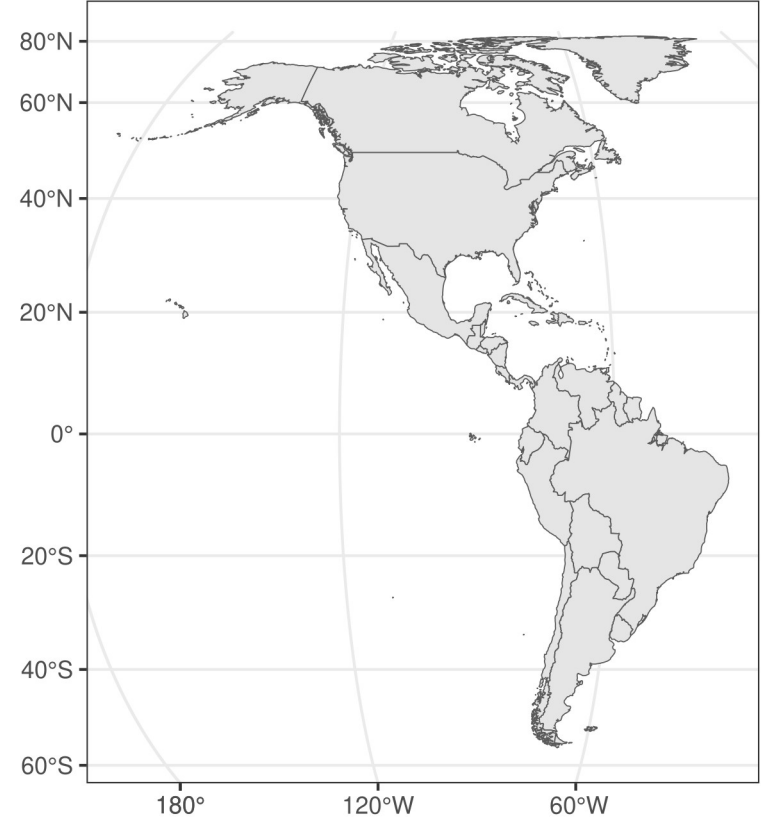
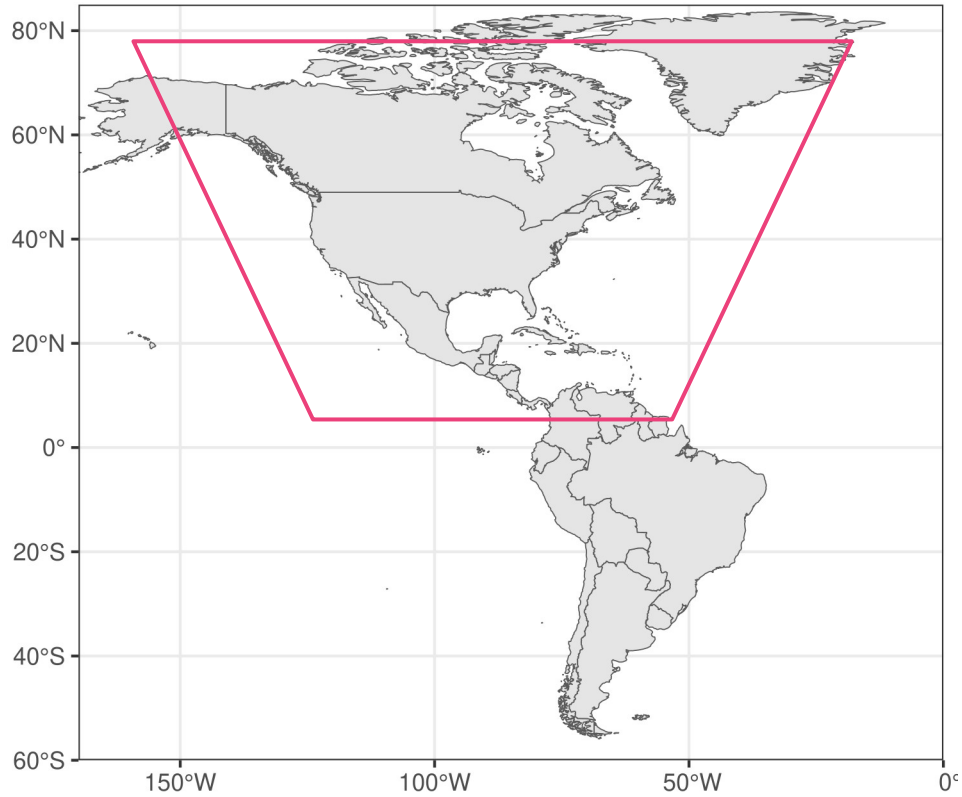


Coordenadas geográficas



Coordenadas proyectadas

Problemas serios en gradientes latitudinales amplios,
coordenadas geográficas deforman el tamaño de píxeles,
afectando la densidad de puntos



Moraleja:

Moraleja:

Siempre utilizar sistemas de coordenadas proyectadas específicas para
área de estudio